

Logică și teoria mulțimilor

Examen

7 Februarie 2025

Subiectul 1. Fie $f : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, $f(a, b) = a^2b$.

(1p) (i) Fie $A = \{(1, 1), (1, 36), (2, 9), (3, 2)\}$. Determinați $f(A)$.

(3p) (ii) Determinați $f^{-1}(\{1, 36, 200\})$.

(2p) (iii) Este f injectivă? Justificați.

(3p) (iv) Este f surjectivă? Justificați.

Subiectul 2. Pe $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ considerăm relația ρ dată prin:

$$(a, b)\rho(a', b') \iff a \leq a' \text{ și } ab \leq a'b'$$

(3p) (i) Arătați că ρ este o relație de ordine pe $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ care nu este totală.

(3p) (ii) Fie $A = \{(3, 5), (4, 3), (2, 4), (1, 13)\}$. Determinați elementele minimale și maxime ale lui A în raport cu ρ .

(3p) (iii) Fie $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ și

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid (x, y)\rho(a, b)\}$$

Arătați că M este finită.

Subiectul 3. Pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ considerăm relația $\sim$ definită prin

$$(x, y) \sim (z, t) \iff |xy| = |zt|$$

(3p) (i) Arătați că $\sim$ este o relație de echivalență.

(3p) (ii) Determinați clasele de echivalență ale lui $(0, 0)$ și $(5, 33)$.

(3p) (iii) Arătați că mulțimea factor $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \sim$ este infinită.

Subiectul 4. Arătați, folosind principiul inducției matematice, că

$$2^n \mid (n+1)(n+2) \cdots (2n-1)2n$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

Subiectul 5. Fie A mulțimea numerelor *întregi negative impare*. Dați un exemplu de funcție $f : A \rightarrow \mathbb{Z}$ astfel încât:

(5p) (i) f este bijectivă.

(4p) (ii) f este surjectivă, dar nu injectivă.

Notă. Fiecare subiect este notat de la 1 la 10. Nota finală este media punctajelor celor cinci subiecte.